Concours 1991 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

***

Epreuve de MATHEMATIQUES commune aux Options Mathématiques et Physique

- 27 mai 1991 -

(à distribuer aux candidats)

***

Le but du problème est de calculer, pour tout n entier strictement positif, l'intégrale

$$K_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt .$$

Pour simplifier la terminologie et les notations, on confondra polynômes et fonctions polynômes et on notera respectivement I, I^* et I_a les intervalles $[0, +\infty[$, $]0, +\infty[$ et $[a, +\infty[$ $(a > 0)$.

I - Généralités

On désigne par C l'ensemble des fonctions définies et continues sur I, à valeurs complexes, et par $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de C défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in C \,/\, \forall \gamma \in I^* \,,\ \lim_{t \to +\infty} (e^{-\gamma t} f(t)) = 0 \right\} .$$

1°) Montrer que $\mathcal{E}$ contient les fonctions polynômes, et que si f et g appartiennent à $\mathcal{E}$, f × g appartient aussi à $\mathcal{E}$.

En déduire que, $\forall f \in \mathcal{E}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n définie sur I par $g(t) = t^n f(t)$ appartient à $\mathcal{E}$.

Montrer que, si f élément de C est bornée, f appartient à $\mathcal{E}$.

2°) Etude, pour $f \in \mathcal{E}$, de l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$.

a) Montrer que, $\forall x \in I^*$, cette intégrale est absolument convergente .

b) $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n(x) = \int_n^{n+1} e^{-xt} f(t)\, dt$.

Montrer que la série de fonctions, de terme général v_n, est convergente sur I^*, de somme F, et que, pour tout choix du réel $a > 0$, elle converge uniformémemt sur I_a . En déduire que F est continue sur I^* .

c) Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, v_n est de classe C^1 sur I^* .

Soit a un réel strictement positif.
Montrer que la série de fonctions, de terme général v_n' , est uniformément convergente sur I_a .
En déduire que F est de classe C^1 sur I^* et expliciter F' au moyen d'une intégrale généralisée.

d) Prouver par récurrence que F est de classe C^∞ sur I^* et expliciter ses dérivées successives $F^{(n)}$ sous forme d'intégrales généralisées.

A SUIVRE

e) On suppose que f est bornée. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

Montrer que cette dernière propriété reste vraie si on suppose seulement que f est élément de $\mathcal{E}$.

3°) On suppose que f appartient à $\mathcal{E}$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente.

Montrer que la série de fonctions, de terme général v_n, est uniformément convergente sur I , de somme F . En déduire que F est continue sur I .

4°) Etude de l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f) = F$.

a) Montrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ des fonctions de classe C^∞ sur I^*, à valeurs complexes.

b) Déterminer l'image par $\mathcal{L}$ de la fonction

$$f : t \mapsto e^{\omega t} \quad , \quad \omega = -a + ib \quad , \quad a \in I \quad , \quad b \in \mathbb{R} .$$

En déduire les images par $\mathcal{L}$ des fonctions

$$c : t \mapsto e^{-at} \cos bt \quad \text{et} \quad s : t \mapsto e^{-at} \sin bt , \quad a \in I , b \in \mathbb{R} .$$

II - Calcul de $K_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$

1°) Montrer que, pour tous réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$,

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1 - \cos \beta}{\beta} - \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} + \int_\alpha^\beta \frac{1 - \cos t}{t^2}\,dt .$$

En déduire que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\,dt$ ont même nature et que, en cas de convergence, elles sont égales.

2°) Soit f la fonction définie sur I par : $f(0) = \frac{1}{2}$ et pour $t > 0$, $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$.

Montrer que $f \in \mathcal{E}$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente.

3°) On pose alors, $\forall x \in I$, $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}\,dt$.

En donnant les justifications nécessaires, expliciter sur I^*, G'' puis G au moyen des fonctions usuelles.

4°) Donner la valeur de K_1 .

Tournez la page S.V.P.

III - Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit n un entier $\geqslant 2$.

1°) Soit f la fonction définie sur I par : $f(0) = 1$ et pour $t > 0$, $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$

Montrer que $f \in \mathcal{C}$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente.

On pose alors, $\forall x \in I$, $\Phi_n(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n e^{-xt}\,dt$.

2°) En donnant les justifications nécessaires, expliciter sous forme d'intégrale, la dérivée d'ordre n de Φ_n sur I^*, elle sera notée $\Phi_n^{(n)}$.

3°) Etablir, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, les relations :

$$4^p(\sin t)^{2p} = C_{2p}^p + 2\sum_{k=1}^{p} (-1)^k\, C_{2p}^{p-k} \cos(2kt) ,$$

$$4^p(\sin t)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, C_{2p+1}^{p-k} \sin[(2k+1)\,t] .$$

4°) En déduire (en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$) l'expression de $\Phi_n^{(n)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

IV - Cette partie, technique, vise à mettre en place des éléments destinés à préciser la fonction Φ_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Montrer que, $\forall x \in I^*$, $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \frac{\alpha_n}{x}$ où α_n est un réel que l'on calculera.

2°) Soit ρ un nombre réel strictement positif. On pose ,

$\forall x \in I^*$, $L_{n,\rho}(x) = \frac{(x + i\rho)^{n-1}}{(n-1)\,!}(f_\rho(x) + ig_\rho(x)) + H_{n,\rho}(x)$ où $f_\rho(x) = \operatorname{Arctan}\frac{x}{\rho}$, $g_\rho(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \rho^2)$ et $H_{n,\rho}$ est un polynôme à coefficients complexes de degré au plus $n - 1$.

Montrer que : $\frac{d^n}{dx^n}[L_{n,\rho}(x)] = \frac{\rho}{x^2 + \rho^2} + i\frac{x}{x^2 + \rho^2}$.

A SUIVRE

3°) On pose $\dfrac{(x + i\rho)^{n-1}}{(n-1)\,!} = U_{n,\rho}(x) + i\,V_{n,\rho}(x)$ où $U_{n,\rho}(x)$ et $V_{n,\rho}(x)$ sont réels.

a) Calculer, pour $n \geqslant 2$, $U_{n,\rho}(0)$ et $V_{n,\rho}(0)$.

b) Expliciter $U_{n,\rho}$ et $V_{n,\rho}$. Etudier leur parité.

4°) On désigne respectivement par $F_{n,\rho}(x)$ et $G_{n,\rho}(x)$, la partie réelle et la partie imaginaire de $L_{n,\rho}(x)$.

Montrer que :

$$F_{n,\rho} = U_{n,\rho}\, f_\rho - V_{n,\rho}\, g_\rho + P_{n,\rho}\ ,$$

$$G_{n,\rho} = V_{n,\rho}\, f_\rho + U_{n,\rho}\, g_\rho + Q_{n,\rho}\ ,$$

où $P_{n,\rho}$ et $Q_{n,\rho}$ sont des polynômes à coefficients réels de degré au plus $n - 1$.

V - Calcul de K_n $(n \geqslant 2)$

Dans chaque question, on distinguera les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.

1°) En utilisant les parties III et IV, donner une expression de Φ_n.
(Dans cette expression figure un polynôme inconnu, de degré inférieur ou égal à $n - 1$)

2°) En remarquant que, pour $x \in I^*$, on peut écrire :

$$f_\rho(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{\rho}{x} \quad \text{et} \quad g_\rho(x) = \ln x + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\rho^2}{x^2}\right),$$

montrer que Φ_n peut se mettre sous la forme :

$$\Phi_n(x) = A_n(x)\ln x + B_n(x) + \varepsilon_n(x)$$

où A_n et B_n sont deux polynômes et où $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$.

En déduire que A_n et B_n sont en fait tous deux identiques au polynôme nul.

3°) Expliciter K_n. Calculer K_2, K_3, K_4, K_5.

***

FIN